

**SOLUCIONARIO DE LA PRIMERA PRÁCTICA
CALIFICADA DE CALCULO NUMERICO
MB-535**

Solo se permite el uso de una hoja de formulario

Problema 1

La relación que describe el gasto de aire a bajas velocidades a través de un medidor de flujo es:

$$m = C.A \left[\frac{2g_c p_1}{RT_1} (p_1 - p_2) \right]^{1/2}$$

donde C es un coeficiente de descarga empírico, A el área de flujo, p_1 y p_2 las presiones corriente arriba y corriente abajo, T_1 la temperatura corriente arriba y R la constante de gas para el aire. ¿Cuales son los límites de variación del gasto de aire m ?, para las siguientes condiciones:

$$C = 0.920 \pm 0.005 \text{ (datos de calibración)}$$

$$p_1 = 25.0 \text{ psia} \pm 0.5 \text{ psia (libras por pulgadas cuadrada)}$$

$$T_1 = 294 \text{ }^\circ\text{K} \pm 2 \text{ }^\circ\text{K}$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 1.400 \text{ psi} \pm 0.005 \text{ psi (medida directamente)}$$

$$A = 1.000 \text{ m}^2 \pm 0.001 \text{ m}^2.$$

$$R = 0.082$$

$$g_c = 9.8$$

Solución

El gasto de aire es una función de varias variables:

$$m = f(C, A, p_1, \Delta p, T_1), \text{ donde:}$$

$$g_c = 9.8, p_1 = 25, R = 0.082, T_1 = 294, \Delta p = 1.4, c = 0.92, A = 1$$

$$\epsilon_{p_1} = 0.5, \epsilon_{T_1} = 2, \epsilon_{\Delta p} = 0.005, \epsilon_c = 0.005, \epsilon_A = 0.001$$

Las respectivas derivadas son:

$$\frac{\partial m}{\partial C} = A \left(\frac{2g_c p_1}{RT_1} \Delta p \right)^{1/2} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial C} = 5.3343$$

$$\frac{\partial m}{\partial A} = C \left(\frac{2g_c p_1}{RT_1} \Delta p \right)^{1/2} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial A} = 4.9076$$

$$\frac{\partial m}{\partial p_1} = 0.5CA \left(\frac{2g_c}{RT_1} \Delta p \right)^{1/2} p_1^{-1/2} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial p_1} = 0.0982$$

$$\frac{\partial m}{\partial \Delta p} = 0.5CA \left(\frac{2g_c p_1}{RT_1} \right)^{1/2} \Delta p^{-1/2} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial \Delta p} = 1.7527$$

$$\frac{\partial m}{\partial T_1} = -0.5CA \left(\frac{2g_c p_1}{R} \Delta p \right)^{1/2} T_1^{-3/2} \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial T_1} = -0.0083$$

$$\varepsilon(m) = 5.3343 * 0.005 + 4.9076 * 0.001 + 0.0982 * 0.5 + 0.0083 * 2 + 1.7527 * 0.005 = 0.1061$$

Entonces

$$m - \varepsilon \leq M \leq m + \varepsilon$$

$$4.9076 - 0.1061 \leq M \leq 4.9076 + 0.1061$$

$$4.8015 \leq M \leq 5.0137$$

Problema 2

Sea un sistema binario de punto flotante de 16 bits:

s	e ₁ e ₂ e ₃ e ₄ e ₅	m ₁ m ₂ m ₃ m ₄ m ₅ m ₆ m ₇ m ₈ m ₉ m ₁₀
---	--	--

Donde los números normalizados son de la forma:

$$x = (-1)^s 1.m_1m_2m_3 \dots m_{10} 2^{(e_1e_2e_3e_4e_5)_2 - 15}$$

Además:

$$00000_2 < (e_1e_2e_3e_4e_5)_2 < 11111_2$$

Muestre la representación en punto flotante y los 16 bits del:

- Numero 1
- El numero 1+eps
- Mayor valor positivo normalizado
- Menor valor positivo normalizado
- El numero: 475.65625

Solución

a)

$$(-1)^0 1.0000000000x 2^{01111_2 - 15}$$

$$0 \quad 01111 \quad 0000000000$$

b)

$$(-1)^0 1.0000000001x 2^{01111_2 - 15}$$

$$0 \quad 01111 \quad 0000000001$$

c)

$$(-1)^0 1.1111111111x 2^{11110_2 - 15}$$

$$0 \quad 11110 \quad 1111111111$$

d)

$$(-1)^0 1.0000000000x 2^{00001_2 - 15}$$

$$0 \quad 00001 \quad 0000000000$$

e)

$$475.65625 = 111011011.10101_2 = 1.1101101110 \times 2^8$$

$$(e_1 e_2 e_3 e_4 e_5)_{2^{-15}} = 8$$

$$(e_1 e_2 e_3 e_4 e_5)_{2^{-23}} = 10111_2$$

$$0 \quad 10111 \quad 1101101110$$

Problema 3

Sea el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1/7 & 1/6 & 1/5 & 1/4 \\ 1/6 & 1/5 & 1/4 & 1/3 \\ 1/5 & 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 319/420 \\ 19/20 \\ 77/60 \\ 25/12 \end{pmatrix}$$

Se sabe que los cálculos se realizan con un computador hipotético que usa una aritmética de punto flotante con redondeo a 3 dígitos significativos.

Ejm. 143.852 se redondea a 0.144×10^3 , 0.005627 se redondea a 0.563×10^{-2}

- Analice el condicionamiento del sistema y estime el número de dígitos de precisión esperados.
- Resolver usando redondeo de 03 dígitos significativos usando Eliminación de Gauss con pivoteo total. Comente sus resultados.

Solución

a)

$$k(A) = \|A\|_{\infty} \|A^{-1}\|_{\infty} = 2.8375 \times 10^4$$

$$s \geq t - \log_{10} k(A)$$

$$t = 3$$

$$s \geq 3 - 4.4529$$

$$s \geq -1.4529$$

No se espera tener ninguna cifra de precisión en la solución. Por lo tanto el sistema está mal condicionado.

b)

$$\begin{bmatrix} 0.143 & 0.167 & 0.200 & 0.250 \\ 0.167 & 0.200 & 0.250 & 0.333 \\ 0.200 & 0.250 & 0.333 & 0.500 \\ 0.250 & 0.333 & 0.500 & 1.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.760 \\ 0.950 \\ 1.28 \\ 2.08 \end{bmatrix}$$

Intercambiamos fila 1 y fila 4

$$\begin{bmatrix} 0.250 & 0.333 & 0.500 & 1.000 \\ 0.167 & 0.200 & 0.250 & 0.333 \\ 0.200 & 0.250 & 0.333 & 0.500 \\ 0.143 & 0.167 & 0.200 & 0.250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.08 \\ 0.950 \\ 1.28 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

Intercambiamos columna 1 y columna 4

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.333 & 0.500 & 0.250 \\ 0.333 & 0.200 & 0.250 & 0.167 \\ 0.500 & 0.250 & 0.333 & 0.200 \\ 0.250 & 0.167 & 0.200 & 0.143 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.08 \\ 0.950 \\ 1.28 \\ 0.76 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = 0.333 \quad m_{31} = \frac{A_{31}}{A_{11}} = 0.500 \quad m_{41} = \frac{A_{41}}{A_{11}} = 0.250$$

$$f_2 = f_2 - m_{21}f_1 \quad f_3 = f_3 - m_{31}f_1 \quad f_4 = f_4 - m_{41}f_1$$

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.333 & 0.500 & 0.250 \\ 0 & 0.0890 & 0.0830 & 0.0837 \\ 0 & 0.0830 & 0.0830 & 0.0750 \\ 0 & 0.0837 & 0.0750 & 0.0805 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.08 \\ 0.257 \\ 0.24 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{A_{32}}{A_{22}} = 0.933 \quad m_{42} = \frac{A_{42}}{A_{22}} = 0.940$$

$$f_3 = f_3 - m_{32}f_2 \quad f_4 = f_4 - m_{42}f_2$$

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.333 & 0.500 & 0.250 \\ 0 & 0.0890 & 0.0830 & 0.0837 \\ 0 & 0 & 0.0056 & -0.0031 \\ 0 & 0 & -0.0030 & 0.0018 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.08 \\ 0.257 \\ 0 \\ -0.002 \end{bmatrix}$$

$$m_{43} = \frac{A_{43}}{A_{33}} = -0.536$$

$$f_4 = f_4 - m_{43}f_3$$

$$\begin{bmatrix} 1.000 & 0.333 & 0.500 & 0.250 \\ 0 & 0.0890 & 0.0830 & 0.0837 \\ 0 & 0 & 0.0056 & -0.0031 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000140 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.08 \\ 0.257 \\ 0 \\ -0.002 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -14.3 \quad x_2 = 23.7 \quad x_3 = -7.91 \quad x_4 = 1.71$$

Puesto que la solución exacta es $[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$, se verifica el mal condicionamiento del sistema.

Problema 4

Considere el sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + 4y + 2z = 9 \\ -2x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

- Obtener la factorización LU de Doolite de la matriz de coeficientes y utilizarlo para resolver el sistema.
- Justifique que la matriz de coeficientes es simétrica y definida positiva
- Resuelva por el método de Cholesky.

Solución

(a)

Factorizando:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 2/7 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 7/2 & 1 \\ 0 & 0 & 5/7 \end{pmatrix}$$

Resolviendo

$$Ax=b \rightarrow (LU)x=b \rightarrow Ux=z \wedge Lz=b$$

$$z = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 5/7 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A=A^T$$

Por Silvester:

$$A_{11} > 0$$

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} > 0$$

$$\det(A) > 0$$

Luego:

A es simétrica y definida positiva

(c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow L = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{14}/2 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{14}/7 & \sqrt{35}/7 \end{pmatrix}$$

Resolviendo

$$Ax=b \rightarrow (LL^T)x=b \rightarrow L^T x=z \wedge Lz=b$$

$$z = \begin{pmatrix} -1.4142 \\ 4.2762 \\ 0.8452 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Los Profesores